

Estudio didáctico de juegos combinatorios de tipo Nim

Ximena Colipan

Maths à Modeler - Universidad Católica del Maule

Santiago, 10 de noviembre de 2015

- 1 Contexto
- 2 Juegos de tipo Nim
- 3 Situations de recherche pour la Classe
- 4 El juego de Euclides geométrico
- 5 Estudio experimental del juego de Euclides geométrico
- 6 Conclusiones y perspectivas

- 1 Contexto
- 2 Juegos de tipo Nim
- 3 Situations de recherche pour la Classe
- 4 El juego de Euclides geométrico
- 5 Estudio experimental del juego de Euclides geométrico
- 6 Conclusiones y perspectivas

- Desafección de los estudiantes hacia el área científica.
 - Tratamiento que se le da en clases a las disciplinas asociadas.
 - La imposición de contenidos curriculares.
- La gran distancia que existe entre el contenido de las prácticas escolares y la realidad de la investigación científica.

Proponer « situaciones para la clase »
cercanas a la investigación en matemática, en forma de juego

- 1 ¿Qué tipo de juegos?
- 2 ¿Cuáles pueden ser los aprendizajes inducidos?
- 3 ¿Cuáles son las condiciones didácticas para la inserción en clases?

Pregunta 1 : ¿Qué tipo de juegos ?

En relación a la motivación *cercano a la investigación en matemática*

- Pregunta epistemológica sobre el objeto *juego* en matemática
 - Primer elemento de respuesta : la teoría de juegos combinatorios

En relación a la motivación *situación lúdica que permita hacer matemática*

- *Juegos simples* en la teoría de juegos combinatorios
 - Los juegos de tipo Nim

Pregunta 1 : ¿Qué tipo de juegos ?

¿Porqué los juegos de tipo Nim son *simples*?

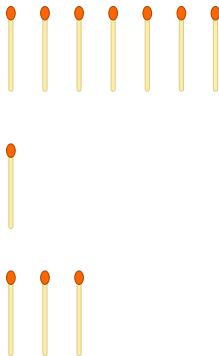
- El juego (soporte físico y las reglas) es de fácil acceso
- Le juego es imparcial : los jugadores tienen las mismas posibilidades de jugadas
- La regla de terminación es fácil :
 - El último en jugar gana la partida (convención normal)
 - El último en jugar pierde la partida (convención miseria)

- 1 Contexto
- 2 Juegos de tipo Nim**
- 3 Situations de recherche pour la Classe
- 4 El juego de Euclides geométrico
- 5 Estudio experimental del juego de Euclides geométrico
- 6 Conclusiones y perspectivas

El juego de Nim : un ejemplo

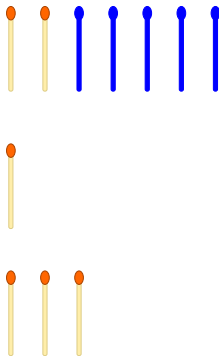
Posición inicial : Tres pilas, con 7, 1 y 3 fósforos respectivamente

Dos jugadores : Azul y Rojo



El juego de Nim : un ejemplo

Primera jugada : Azul toma cinco fósforos de la primera pila



El juego de Nim : un ejemplo

Segunda jugada : Rojo toma los tres fósforos de la tercera pila



El juego de Nim : un ejemplo

Tercera jugada : Azul toma un fósforo de la primera pila



El juego de Nim : un ejemplo

Cuarta jugada : Rojo toma el último fósforo de la segunda pila



El juego de Nim : un ejemplo

Quinta jugada : Azul toma el fósforo que queda y gana la partida !



El juego de Nim : enunciado

- Una cantidad arbitraria de fósforos es puesta en una o varias pilas
- Los jugadores pueden tomar, en cada turno, entre un o todos los fósforos de una pila
- El jugador que toma el último fósforo es el ganador (convención normal)

Un primer juego de tipo Nim : El juego de sustracción

- El juego de sustracción corresponde a un juego de Nim con restricción en el número de fósforos que se pueden retirar en cada turno
- Por ejemplo : los jugadores retiran, en cada turno, 1 o 2 fósforos por pila
- La course à n : una representación de juego de sustracción en una pila

La course à n (la carrera a n)

- Dos jugadores en cada turno, deben decir un número
- El juego consiste en ser el primero en decir un número n
- El primero en jugar puede decir 1 o 2
- El segundo debe decir un número añadiendo 1 o 2 al número que el adversario acaba de decir y así sucesivamente

Pregunta 2 : ¿Cuáles son los aprendizajes inducidos ?

Que significa « resolver un juego »

Encontrar una estrategia ganadora y/o caracterizar las posiciones del juego

Identificar las posiciones ganadoras y perdedoras

Definición **recursiva** :

Una posición es **ganadora** si existe una jugada que da una posición **perdedora**

Una posición es **perdedora** si todas las jugadas dan una posición **ganadora**

Pregunta 2 : ¿Cuáles son los aprendizajes inducidos ?

Que significa « resolver un juego »

Encontrar una estrategia ganadora y/o caracterizar las posiciones del juego

Identificar las posiciones ganadoras y perdedoras

Definición **recursiva** :

Una posición es **ganadora** si existe una jugada que da una posición **perdedora**

Una posición es **perdedora** si todas las jugadas dan una posición **ganadora**

Pregunta 2 : ¿Cuáles son los aprendizajes inducidos ?

Que significa « resolver un juego »

Encontrar una estrategia ganadora y/o caracterizar las posiciones del juego

Identificar las posiciones ganadoras y perdedoras

Definición **recursiva** :

Una posición es **ganadora** si existe una jugada que da una posición **perdedora**

Una posición es **perdedora** si todas las jugadas dan una posición **ganadora**

Pregunta 2 : ¿Cuáles son los aprendizajes inducidos ?

Que significa « resolver un juego »

Encontrar una estrategia ganadora y/o caracterizar las posiciones del juego

Identificar las posiciones ganadoras y perdedoras

Definición **recursiva** :

Una posición es **ganadora** si **existe** una jugada que da una posición **perdedora**

Una posición es **perdedora** si **todas** las jugadas dan una posición **ganadora**

Pregunta 2 : ¿Cuáles son los aprendizajes inducidos ?

Inducción

Razonamiento inductivo sobre las configuraciones sucesivas del juego que son del mismo tipo y de dimensiones mas pequeñas

Representación, modelización

El juego de Nim puede representarse en diferentes formas. Por ejemplo...

Pregunta 2 : ¿Cuáles son los aprendizajes inducidos ?

Inducción

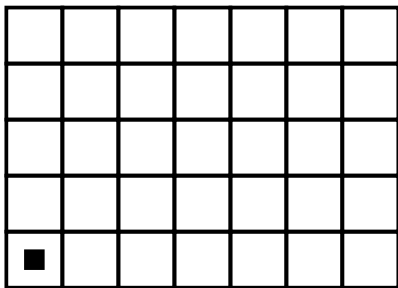
Razonamiento inductivo sobre las configuraciones sucesivas del juego que son del mismo tipo y de dimensiones mas pequeñas

Representación, modelización

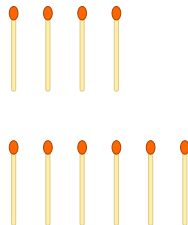
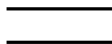
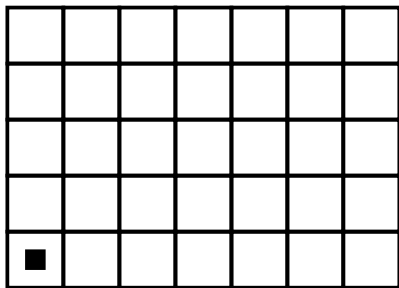
El juego de Nim puede representarse en diferentes formas. Por ejemplo...

El juego del chocolate : una representación de juego de Nim en dos pilas

El juego del chocolate : una representación de juego de Nim en dos pilas



El juego del chocolate : una representación de juego de Nim en dos pilas



- 1 Contexto
- 2 Juegos de tipo Nim
- 3 Situations de recherche pour la Classe**
- 4 El juego de Euclides geométrico
- 5 Estudio experimental del juego de Euclides geométrico
- 6 Conclusiones y perspectivas

Características del modelo SiRC (Grenier y Payan 2002)

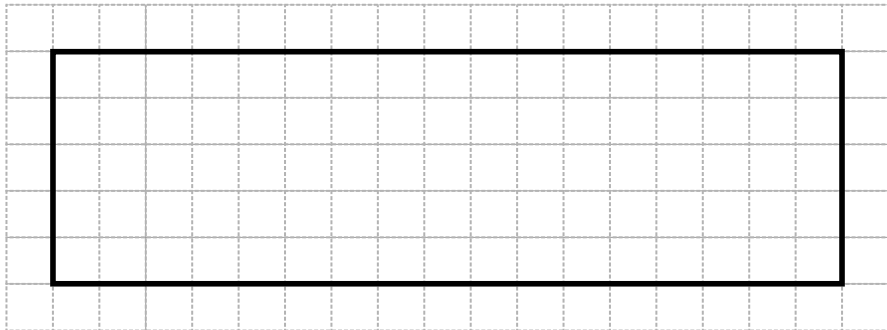
- La situación se inscribe en una problemática de investigación profesional
- El problema inicial es de fácil acceso
- Los métodos de resolución no están señalados
- Conocimientos elementales en matemática son suficientes para entender y atacar el problema
- Un problema resuelto reenvía a un nuevo problema.
- Las variables del problema están a disposición del alumno (variable de recherche) (Godot 2005)

En el modelo SiRC, la expresión estrategia corresponde a un procedimiento de búsqueda

- 1 Contexto
- 2 Juegos de tipo Nim
- 3 Situations de recherche pour la Classe
- 4 El juego de Euclides geométrico**
- 5 Estudio experimental del juego de Euclides geométrico
- 6 Conclusiones y perspectivas

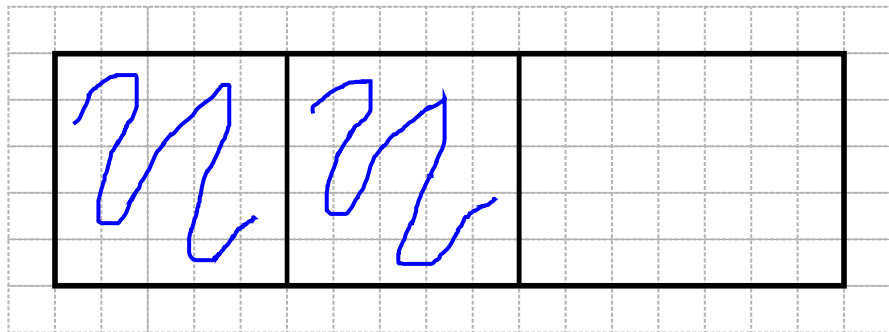
Ejemplo de una jugada en un rectángulo de talla 17×5

Posición de inicio :



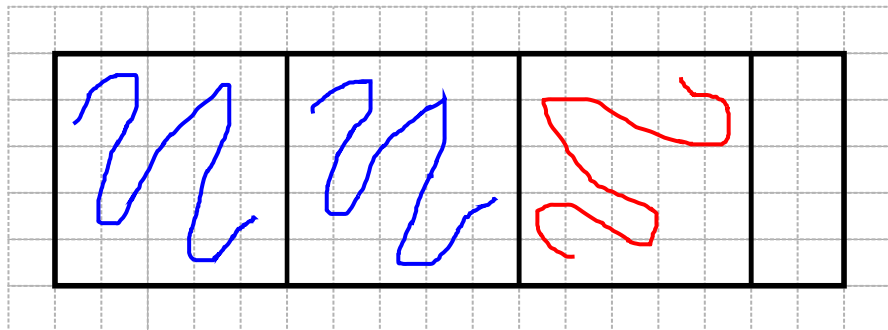
Ejemplo de una jugada en un rectángulo de talla 17×5

Primera jugada :



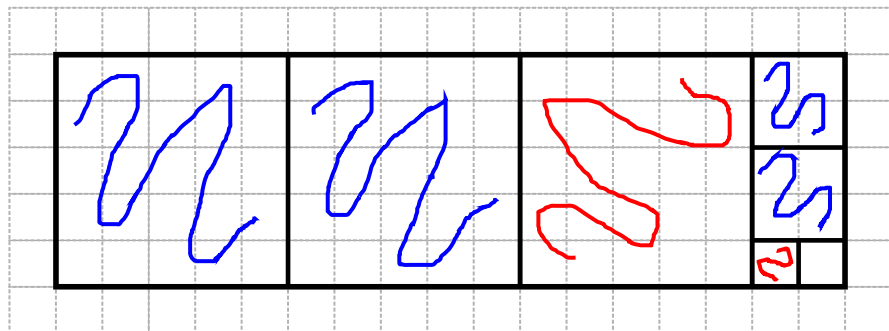
Ejemplo de una jugada en un rectángulo de talla 17×5

Segunda jugada :



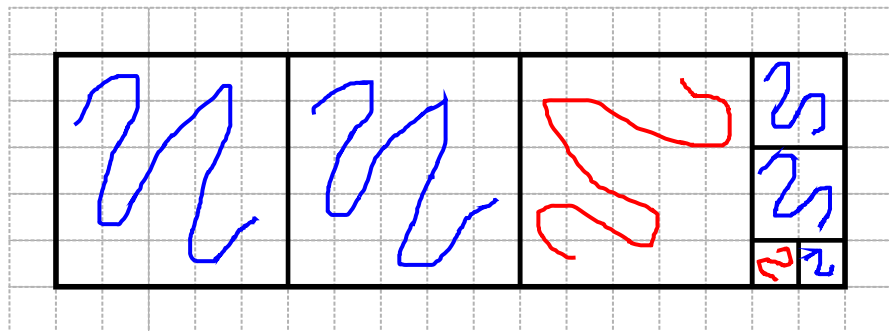
Ejemplo de una jugada en un rectángulo de talla 17×5

Cuarta jugada :



Ejemplo de una jugada en un rectángulo de talla 17×5

Quinta jugada : Azul traza el último cuadrado y pierde (convención miseria)



Enunciado general del juego de Euclides geométrico

Inicialmente se dispone de un rectángulo de dimensiones $a \times b$.

Cada jugador en su turno, debe trazar cuadrados en el rectángulo según las siguientes reglas :

- Cada cuadrado debe ser el más grande posible, adyacente a una esquina del rectángulo
- En cada turno, el jugador puede trazar 1 o 2 cuadrados, pero de la misma dimensión
- El jugador que toma el último cuadrado es el perdedor (convención miseria)

Como en el juego de sustracción, el número de cuadrados que pueden tomarse, podrían ser diferentes.

Interrogante 1

- ¿Cuáles deben ser los valores de (a, b) para que el juego sea finito?
 - El juego es finito si y solamente si a y b son conmensurables

A continuación a y b son números enteros

- Juego compuesto de diferentes etapas que corresponden a las diferentes dimensiones de los cuadrados que pueden ser trazados.
- La regla del juego fuerza el algoritmo de Euclides. En efecto, sean (a, b) las dimensiones del rectángulo

$$a = b \times \mathbf{q_1} + r_1$$

$$b = r_1 \times \mathbf{q_2} + r_2$$

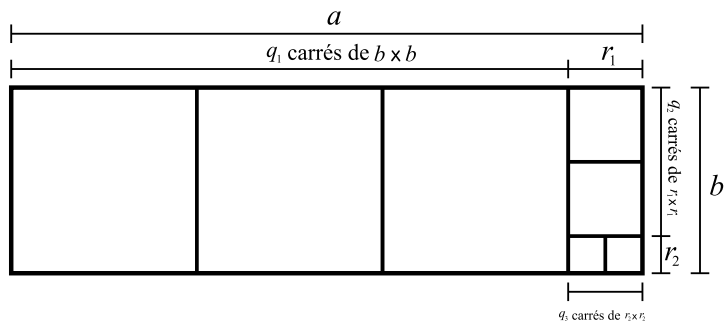
$$r_1 = r_2 \times \mathbf{q_3} + r_3$$

⋮

$$r_{n-3} = r_{n-2} \times \mathbf{q_{n-1}} + r_{n-1}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} \times \mathbf{q_n} + 0$$

Etapas del juego



- ¿Cuál es la condición sobre (a, b) para que el juego tenga n etapas?
 - No existe una fórmula, a nuestro conocimiento, para el número de etapas del algoritmo de Euclides
 - Hay un cota para el número de etapas : teorema de Lamé

Dos procedimientos

- Fijar las dimensiones del rectángulo $a \times b$
- Fijar el número de etapas del juego

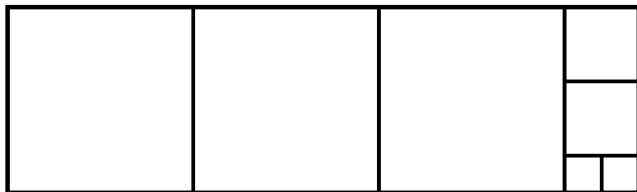
Composición secuencial de juegos de sustracción

El elemento importante en cada etapa del juego es el número de cuadrados (que corresponden a los cocientes del algoritmo de Euclides)



Composición secuencial de juegos de sustracción

El elemento importante en cada etapa del juego es el número de cuadrados (que corresponden a los cocientes del algoritmo de Euclides)



Cada etapa puede ser modelizada como un juego de Nim con una pila, con la restricción de sustraer 1 o 2 fósforos (juego de sustracción)

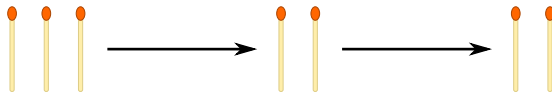


Composición secuencial de juegos de sustracción

El elemento importante en cada etapa del juego es el número de cuadrados (que corresponden a los cocientes del algoritmo de Euclides)



Cada etapa debe estar finalizada antes de pasar a la siguiente (composición secuencial)

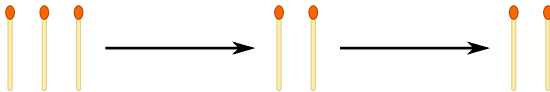


Composición secuencial de juegos de sustracción

El elemento importante en cada etapa del juego es el número de cuadrados (que corresponden a los cocientes del algoritmo de Euclides)

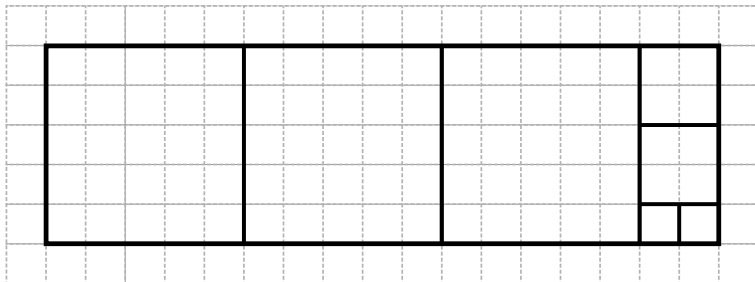


Estudio de la composición secuencial de juegos de sustracción



- Una representación realista del juego
- Primer nivel de abstracción
- Segundo nivel de abstracción

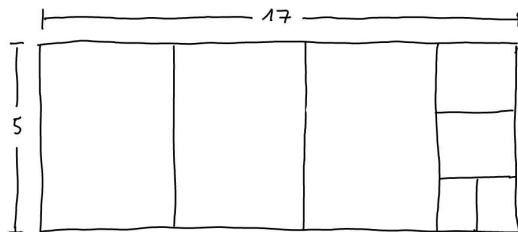
- Una representación realista del juego



- Primer nivel de abstracción
- Segundo nivel de abstracción

Diferentes representaciones o modelizaciones del juego

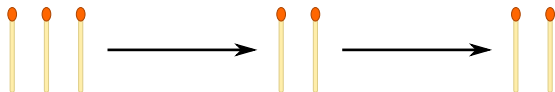
- Una representación realista del juego
- Primer nivel de abstracción



- Segundo nivel de abstracción

Diferentes representaciones o modelizaciones del juego

- Una representación realista del juego
- Primer nivel de abstracción
- Segundo nivel de abstracción



- Nociones Matemáticas : División euclidiana, algoritmo de Euclides, noción de múltiplo, números primos relativos, congruencia sobre los enteros, cuantificadores, razonamiento inductivo.
- Nociones específicas de un juego combinatorio : Una estrategia y su construcción, Estrategia ganadora, posición ganadora y posición perdedora.
- Saber-hacer fundamentales de la matemática : El juego pone en obra saber-hacer propios de la actividad matemática, específicamente, los elementos necesarios para formular y validar resultados concernientes al juego.

Nociones en juego en la situación

- Nociones Matemáticas : División euclidiana, algoritmo de Euclides, noción de múltiplo, números primos relativos, congruencia sobre los enteros, cuantificadores, razonamiento inductivo.
- Nociones específicas de un juego combinatorio : Una estrategia y su construcción, Estrategia ganadora, posición ganadora y posición perdedora.
- Saber-hacer fundamentales de la matemática : El juego pone en obra saber-hacer propios de la actividad matemática, específicamente, los elementos necesarios para formular y validar resultados concernientes al juego.

Nociones en juego en la situación

- Nociones Matemáticas : División euclidiana, algoritmo de Euclides, noción de múltiplo, números primos relativos, congruencia sobre los enteros, cuantificadores, razonamiento inductivo.
- Nociones específicas de un juego combinatorio : Una estrategia y su construcción, Estrategia ganadora, posición ganadora y posición perdedora.
- Saber-hacer fundamentales de la matemática : El juego pone en obra saber-hacer propios de la actividad matemática, específicamente, los elementos necesarios para formular y validar resultados concernientes al juego.

- 1 Experimentación aleatoria
- 2 Experimentaciones inductivas

Experimentación aleatoria

- La dimensión de los cuadrados y el número de cuadrados de igual dimensión, dependen solo de las dimensiones (a,b) del rectángulo y no de las jugadas realizadas
- El juego esta compuesto de etapas, cada una con diferentes dimensiones de cuadrados
- Toda etapa debe estar terminada antes de pasar a la siguiente
- Cada etapa del juego, es un juego de sustracción con cuadrados de igual dimensión
- Las etapas del juego pueden terminar ya sea en convención normal o convención miseria, salvo la última etapa que es siempre un juego en convención miseria
- El juego puede ser analizado en orden inverso, a partir de la última etapa
- El número de cuadrados de igual dimensión y de máxima dimensión para un rectángulo $a \times b$, corresponde al cociente de la división euclidiana
- El número de cuadrados de cada etapa corresponde al cociente de una etapa específica del algoritmo de Euclides

Experimentación aleatoria

- La dimensión de los cuadrados y el número de cuadrados de igual dimensión, dependen solo de las dimensiones (a,b) del rectángulo y no de las jugadas realizadas
- El juego esta compuesto de etapas, cada una con diferentes dimensiones de cuadrados
- Toda etapa debe estar terminada antes de pasar a la siguiente
- Cada etapa del juego, es un juego de sustracción con cuadrados de igual dimensión
- Las etapas del juego pueden terminar ya sea en convención normal o convención miseria, salvo la última etapa que es siempre un juego en convención miseria
- El juego puede ser analizado en orden inverso, a partir de la última etapa
- El número de cuadrados de igual dimensión y de máxima dimensión para un rectángulo $a \times b$, corresponde al cociente de la división euclidiana
- El número de cuadrados de cada etapa corresponde al cociente de una etapa específica del algoritmo de Euclides

Experimentación aleatoria

- La dimensión de los cuadrados y el número de cuadrados de igual dimensión, dependen solo de las dimensiones (a,b) del rectángulo y no de las jugadas realizadas
- El juego esta compuesto de etapas, cada una con diferentes dimensiones de cuadrados
- Toda etapa debe estar terminada antes de pasar a la siguiente
- Cada etapa del juego, es un juego de sustracción con cuadrados de igual dimensión
- Las etapas del juego pueden terminar ya sea en convención normal o convención miseria, salvo la última etapa que es siempre un juego en convención miseria
- El juego puede ser analizado en orden inverso, a partir de la última etapa
- El número de cuadrados de igual dimensión y de máxima dimensión para un rectángulo $a \times b$, corresponde al cociente de la división euclidiana
- El número de cuadrados de cada etapa corresponde al cociente de una etapa específica del algoritmo de Euclides

Experimentación aleatoria

- La dimensión de los cuadrados y el número de cuadrados de igual dimensión, dependen solo de las dimensiones (a,b) del rectángulo y no de las jugadas realizadas
- El juego esta compuesto de etapas, cada una con diferentes dimensiones de cuadrados
- Toda etapa debe estar terminada antes de pasar a la siguiente
- Cada etapa del juego, es un juego de sustracción con cuadrados de igual dimensión
- Las etapas del juego pueden terminar ya sea en convención normal o convención miseria, salvo la última etapa que es siempre un juego en convención miseria
- El juego puede ser analizado en orden inverso, a partir de la última etapa
- El número de cuadrados de igual dimensión y de máxima dimensión para un rectángulo $a \times b$, corresponde al cociente de la división euclidiana
- El número de cuadrados de cada etapa corresponde al cociente de una etapa específica del algoritmo de Euclides

Experimentación aleatoria

- La dimensión de los cuadrados y el número de cuadrados de igual dimensión, dependen solo de las dimensiones (a,b) del rectángulo y no de las jugadas realizadas
- El juego esta compuesto de etapas, cada una con diferentes dimensiones de cuadrados
- Toda etapa debe estar terminada antes de pasar a la siguiente
- Cada etapa del juego, es un juego de sustracción con cuadrados de igual dimensión
- Las etapas del juego pueden terminar ya sea en convención normal o convención miseria, salvo la última etapa que es siempre un juego en convención miseria
- El juego puede ser analizado en orden inverso, a partir de la última etapa
- El número de cuadrados de igual dimensión y de máxima dimensión para un rectángulo $a \times b$, corresponde al cociente de la división euclidiana
- El número de cuadrados de cada etapa corresponde al cociente de una etapa específica del algoritmo de Euclides

Experimentación aleatoria

- La dimensión de los cuadrados y el número de cuadrados de igual dimensión, dependen solo de las dimensiones (a,b) del rectángulo y no de las jugadas realizadas
- El juego esta compuesto de etapas, cada una con diferentes dimensiones de cuadrados
- Toda etapa debe estar terminada antes de pasar a la siguiente
- Cada etapa del juego, es un juego de sustracción con cuadrados de igual dimensión
- Las etapas del juego pueden terminar ya sea en convención normal o convención miseria, salvo la última etapa que es siempre un juego en convención miseria
- El juego puede ser analizado en orden inverso, a partir de la última etapa
- El número de cuadrados de igual dimensión y de máxima dimensión para un rectángulo $a \times b$, corresponde al cociente de la división euclidiana
- El número de cuadrados de cada etapa corresponde al cociente de una etapa específica del algoritmo de Euclides

Experimentación aleatoria

- La dimensión de los cuadrados y el número de cuadrados de igual dimensión, dependen solo de las dimensiones (a,b) del rectángulo y no de las jugadas realizadas
- El juego esta compuesto de etapas, cada una con diferentes dimensiones de cuadrados
- Toda etapa debe estar terminada antes de pasar a la siguiente
- Cada etapa del juego, es un juego de sustracción con cuadrados de igual dimensión
- Las etapas del juego pueden terminar ya sea en convención normal o convención miseria, salvo la última etapa que es siempre un juego en convención miseria
- El juego puede ser analizado en orden inverso, a partir de la última etapa
- El número de cuadrados de igual dimensión y de máxima dimensión para un rectángulo $a \times b$, corresponde al cociente de la división euclidiana
- El número de cuadrados de cada etapa corresponde al cociente de una etapa específica del algoritmo de Euclides

Experimentación aleatoria

- La dimensión de los cuadrados y el número de cuadrados de igual dimensión, dependen solo de las dimensiones (a,b) del rectángulo y no de las jugadas realizadas
- El juego esta compuesto de etapas, cada una con diferentes dimensiones de cuadrados
- Toda etapa debe estar terminada antes de pasar a la siguiente
- Cada etapa del juego, es un juego de sustracción con cuadrados de igual dimensión
- Las etapas del juego pueden terminar ya sea en convención normal o convención miseria, salvo la última etapa que es siempre un juego en convención miseria
- El juego puede ser analizado en orden inverso, a partir de la última etapa
- El número de cuadrados de igual dimensión y de máxima dimensión para un rectángulo $a \times b$, corresponde al cociente de la división euclidiana
- El número de cuadrados de cada etapa corresponde al cociente de una etapa específica del algoritmo de Euclides

- Fijar el número de etapas en el juego
- Estudiar el juego en orden inverso
- Estudiar posiciones en el juego en el cual los jugadores solo tienen una jugada posible

- Fijar el número de etapas en el juego
- Estudiar el juego en orden inverso
- Estudiar posiciones en el juego en el cual los jugadores solo tienen una jugada posible

- Fijar el número de etapas en el juego
- Estudiar el juego en orden inverso
- Estudiar posiciones en el juego en el cual los jugadores solo tienen una jugada posible

- 1 Experimentaciones repetitivas y validativas
- 2 Argumentos matemáticos
- 3 Ejemplo genérico

- 1 Exhaustividad de casos
- 2 Contra-ejemplo
- 3 Validación de una estrategia ganadora

- Variables didácticas de la situación

- Variable relacionada al soporte físico (tipo de papel, computador)
- Variable relacionada a la elección de marcos (geométrico, aritmético)
- Variable relacionada al número de cuadrados que podemos trazar (1,2)

- Variables de investigación

- Variable ligada a la relación entre x y y (racional o no)
- Variable ligada a los valores numéricos de x y y (número de etapas del juego)

- Variables didácticas de la situación
 - Variable relacionada al soporte físico (tipo de papel, computador)
 - Variable relacionada a la elección de marcos (geométrico, aritmético)
 - Variable relacionada al número de cuadrados que podemos trazar (1,2)
- Variables de investigación
 - Variable ligada a la relación entre x y y (racional o no)
 - Variable ligada a los valores numéricos de x y y (número de etapas del juego)

- Variables didácticas de la situación
 - Variable relacionada al soporte físico (tipo de papel, computador)
 - Variable relacionada a la elección de marcos (geométrico, aritmético)
 - Variable relacionada al número de cuadrados que podemos trazar (1,2)
- Variables de investigación
 - Variable ligada a la relación entre x y y (racional o no)
 - Variable ligada a los valores numéricos de x y y (número de etapas del juego)

- 1 Contexto
- 2 Juegos de tipo Nim
- 3 Situations de recherche pour la Classe
- 4 El juego de Euclides geométrico
- 5 Estudio experimental del juego de Euclides geométrico**
- 6 Conclusiones y perspectivas

La experimentación realizada, tuvo como objetivo, el trabajo sobre las nociones transversales abordadas por los alumnos y sus consecuencias en relación en la puesta en marcha de estrategias ganadoras para el juego, precisamente se trató de analizar :

- Las estrategias que pueden ser desarrolladas por los alumnos.
- Los resultados (conjeturas, contra-ejemplos, métodos, pruebas) que los alumnos pueden encontrar.

- Conjeturas liées à la variable de recherche $P = (a, b)$ dimension du rectangle ($a \geq b$).
 - Si $a = 2b$ alors la position $P = (2b, b)$ est gagnante.
- Conjeturas liées aux étapes du jeu
 - Chaque étape est en convention misère
 - Les étapes les plus tardives dans le jeu ont une importance relative plus haute pour gagner
- Conjetures par rapport aux divisions euclidiennes
 - Si la quantité de divisions euclidiennes est paire, alors la position de départ est perdante et si elle est impaire, alors la position de départ est gagnante

- Cas particulier $P = (n, 1)$
 - Si $P = (n, 1)$ et n est congru à 1 modulo 3, alors P est perdante.
 - Jouer le complément à 3 de ce qui dit l'adversaire.
- Cas particulier $P = (kn, k)$
- Le jeu dans l'ordre inverse

Grandes limitaciones en los dos niveles estudiados : Limitaciones para transcribir una formulación matemática clara, des métodos y de pruebas, dificultad para encontrar las palabras que describen sus acciones

El rol del gestor se revela indispensable en las fases a-didácticas. Sin dar pistas de solución, sus intervenciones permitieron :

- Re-explicar el juego
- Re-lanzar la resolución (dando ejemplos)
- Responder a preguntas a través de otras preguntas
- Incitar a los estudiantes a la construcción de pruebas

- 1 Contexto
- 2 Juegos de tipo Nim
- 3 Situations de recherche pour la Classe
- 4 El juego de Euclides geométrico
- 5 Estudio experimental del juego de Euclides geométrico
- 6 Conclusiones y perspectivas

- Primer estudio de la transposición didáctica de el objeto « juego matemático »
- Demostramos que los problemas matemáticos cercanos a la investigación pueden ser lúdicos
- Las nociones de estrategia ganadora, posición ganadora y posición perdedora son nociones operacionales, incluso de manera implícita
- Las SiRC basadas en juegos de tipo Nim, inducen una actividad matemática que va más allá del desarrollo y de la práctica de técnicas propias de la matemática
- Las SiRC de tipo Nim demandan condiciones específicas de gestión, de las cuales en este trabajo hemos podido ver algunos elementos

¡Gracias!